

3次元正則図形のソリッドモデルを用いた解析と表示

石井源久

Abstract

Some semi-regular polyhedra can be produced from a regular polyhedron by taking the product space of 3 solid models which are derived from the boundary figures (vertices, edges, faces) of the regular polyhedron.

These semi-regular polyhedra have been produced and analyzed by using not solid models but wire frame models or polygon models.

This paper shows how to produce some semi-regular polyhedra from a regular polyhedron by using solid models. Using solid models, semi-regular polyhedra can be expressed briefly. Therefore we can easily understand the relationship among semi-regular polyhedra, and we can control their shape continuously.

1 はじめに

3次元正則図形の解析は、これまで主にワイヤーフレームモデルまたはポリゴンモデルによって行われていた。これらのモデルは、頂点の座標を最重要視し、実際に扱う形状は、線分(ワイヤー)または多角形(ポリゴン)であった。

これに対し、ソリッドモデルは境界面の方程式を重要視し、多面体または球体などのデータ(ソリッド)を直接扱うものである。ソリッドモデルは、既にさまざまな分野で利用されているが、3次元正則図形の解析にはあまり使用されていない。しかしながら、ソリッドモデルは正則図形の解析を容易にする可能性を持っている。また、4次元あるいはより高い次元への拡張も容易であると考えられる。

そうしたソリッドモデルを形成するにあたって、本論文では、基本立体を、原点から境界面までの距離が等しい3次元半空間の積集合で表し、その大きさを原点から境界面までの距離で表すことによって、複数の基本立体の積集合で表される立体の形状変化を、各基本立体の大きさの比で表すことを考えた。

その結果、頂点の座標を全て記述しなければならなかったものが、3つの変数の比だけで表すことができるようになった。さらに、立体形状の相互関係がより理解しやすいものとなり、およびこれらの形状を連続的に変化させることが可能となった。

1.1 既往研究の歴史

ここでは、この分野での既往研究について、正多面体・半正多面体の研究の歴史とコンピュータグラフィクスにおけるソリッドモデルの研究とに分けて記述する。

1.1.1 正多面体・半正多面体の研究の歴史

3次元の正多面体5種類はプラトンによって、半正多面体13種類はアルキメデスによって紀元前に既に知られていた。

しかし、半正多面体の分類は、長い間あいまいなものであった。例えば、半正多面体は、定義によって 13 種類である (アルキメデスによる) と直観的にいわれたり、それに無数の正多角柱や反正多角柱が加えられたり (アルキメデスによる)、さらに、20 世紀になって基本的な 13 個に直観的に 14 番目が追加されたり (ミラーによる) している。逆に半正多面体を厳密に定義して、正多面体と同じ対称性を持つという項目を加えれば 11 種類に減少するという考え方も出されるようになった。半正多面体 (Semi-regular polyhedron) という単語自身も 2 種類しかない準正多面体 (Quasi-regular polyhedron) と混同されたりもしている。

しかし、これら半正多面体の体系的な分類は、20 世紀になってから、コクセター [1] やラルバニ [2] らによって行われ、今日では、それらの立体形状および相互関係が正確に示されている。これらの研究は、主にワイヤーフレームモデルやポリゴンモデルによって行われている。

1.1.2 ソリッドモデルについて

ソリッドモデルは、立体としての完全な形状データを表現したものであり、集合演算を行って和・差・積の複合形状を生成したり、さまざまなシュミレーションが行える。

3次元ソリッドモデルによるモデリング技法は、1970年代後半から流行し、1980年代前半には、研究開発の成果が商用パッケージとして市場に現れはじめた。1990年代には、パーソナルレベルのモデリングシステムでも、ソリッドモデルによるモデリングが可能なものが多くなっている。

これらのシステムは、工業製品のモデリングやCGの形状データの作成などに、広く利用されている。ソリッドモデルによるモデリング技術は、このように応用分野の広いものであるが、正多面体や半正多面体の解析には、これまでのところほとんど用いられていない。

1.2 既往の説との比較

ワイヤーフレームモデルやポリゴンモデルで立体の形状を記述するには、全ての頂点を列挙する必要がある。

このことは、正多面体や半正多面体の解析において、これらの頂点の数が立体ごとに異なることもあって、相互関係がつかみにくく、形状の連続的な変化を追従することが難しい原因となっている。

一方、ソリッドモデルの表現方法の一つである CSG 表現は、基本立体 (プリミティブ) の種類、大きさと、それらの和、差、積などの結合状態で立体の表現を行う。

ここで、正多面体と同じ対称性を持つ半正多面体を、CSG 表現でモデリングすることを考える。まず、基本立体は対称性のもとになる正多面体から導くことができ、その種類は 3 種類である。また、集合演算については、積集合だけを考えるとよい。よって、プリミティブの大きさ、すなわち三つのパラメータだけである正多面体と同じ対称性を持つ、半正多面体の形状を表すことができる。これにより、立体形状の連続的な変化を観察することも容易となる。

1.3 定数・記号の定義

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618033989$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866025404$$

$$\beta = \frac{\sqrt{\tau + 2}}{2} \approx 0.951056516$$

とする。ここで α は、一辺の長さ $1/\tau$ の正 12 面体の、中心と頂点との距離であり、 β は、一辺の長さ 1 の正 20 面体の、中心と頂点との距離である。

ソリッドモデルは、平面で分割される半空間としての領域の積集合をとることにより、立体を構成するが、この境界としての平面を、

$$V_x(x - x_0) + V_y(y - y_0) + V_z(z - z_0) = 0$$

で表す。

ここで、

$$\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = 1$$

$$V_x = x_0, \quad V_y = y_0, \quad V_z = z_0$$

とする。つまり、原点を中心とする半径 1 の球面に接する平面を考え、原点を始点、接点を終点とするベクトルでその平面を表すことにする。

2 3 回回転対称性を持つ立体

ここでは、正 4 面体と同じ対称性を持つ立体について考察する。これらの立体は、互いに双対な 2 種類の正 4 面体と、立方体の積集合で表すことができる。

2.1 平面群の分類

正 4 面体の体心から、各側面の中心へ向かうベクトル群、各稜線の中心へ向かうベクトル群、各頂点へ向かうベクトル群を求める。それぞれのベクトル群の各ベクトルを境界面の法線ベクトルとし、元の正 4 面体の体心を含む半空間の積集合として得られる立体は、元の正 4 面体、それと双対な正 4 面体、立方体である。

2.1.1 正 4 面体の側面を構成する平面群

正 4 面体 (図 1-A) の側面としての平面群は、

$$\left(+\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \left(+\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

で表される。これらをまとめて、 \mathcal{A} で表す。

\mathcal{A} と双対な正 4 面体 (図 1-B) の側面としての平面群は、

$$\left(+\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \left(+\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

で表される。これらをまとめて、 \mathcal{B} で表す。

2.1.2 立方体の側面を構成する平面群

立方体 (図 1-C) の側面としての平面群は、 \mathcal{A} および \mathcal{B} の正 4 面体の各稜線に平行な位置関係になるようにして、

$$(\pm 1, 0, 0) (0, \pm 1, 0) (0, 0, \pm 1)$$

で表される。これらをまとめて、 \mathcal{C} で表す。

2.2 $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \cdot \mathcal{C}$ 各平面群の積集合による構成

ここでは、正 4 面体 \mathcal{A} 、それと双対な正 4 面体 \mathcal{B} 、立方体 \mathcal{C} の大きさが変化するとき、それらの積集合である立体の形状がどのように変化するか解析する。

2.2.1 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ による構成

\mathcal{A} の平面を表すベクトルを a 倍、 \mathcal{B} の平面を表すベクトルを b 倍する。つまり、原点から \mathcal{A} の各平面までの距離を a 、 \mathcal{B} の各平面までの距離を b とする。このとき、 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ で表される立体を考える。

立体の形状は、 a と b の比に依存し、その変化は以下の通りである。

b	\mathcal{A} による面	\mathcal{B} による面	$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ による立体	図
$b \square b_{a1}a$	なし	正 3 角形	正 4 面体	図 2-B
$b_{a1}a < b < b_{a3}a$	正 3 角形	半正 6 角形		
$b = b_{a2}a$	正 3 角形	正 6 角形	切頭 4 面体	図 2-AB-3
$b = b_{a3}a$	正 3 角形	正 3 角形	正 8 面体	図 2-AB-2
$b_{a3}a < b < b_{a5}a$	半正 6 角形	正 3 角形		
$b = b_{a4}a$	正 6 角形	正 3 角形	切頭 4 面体	図 2-AB-1
$b_{a5}a \square b$	正 3 角形	なし	正 4 面体	図 2-A

ただし、

$$b_{a1} = \frac{1}{3} \approx 0.333333333$$

$$b_{a2} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$b_{a3} = 1$$

$$b_{a4} = \frac{5}{3} \approx 1.666666667$$

$$b_{a5} = 3$$

とする。

2.2.2 $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ による構成

\mathcal{A} の平面を表すベクトルを a 倍、 \mathcal{C} の平面を表すベクトルを c 倍する。つまり、原点から \mathcal{A} の各平面までの距離を a 、 \mathcal{C} の各平面までの距離を c とする。このとき、 $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ で表される立体を考える。

立体の形状は、 a と c の比に依存し、その変化は以下の通りである。

c	\mathcal{A} による面	\mathcal{C} による面	$\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ による立体	図
$c = c_{a1}a$	なし	正方形	立方体	図 2-C
$c_{a1}a \square h \square c_{a3}a$	正 3 角形	平行 6 角形	10 面体	図 2-AC
$c \geq c_{a3}a$	正 3 角形	なし	正 4 面体	図 2-A

また、特に

$$c = c_{a2}a$$

のとき、全ての稜線長さが等しくなる (図 2-AC)。ただし、

$$c_{a1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577350269$$

$$c_{a2} = \frac{\sqrt{3}}{5 - 2\sqrt{2}} \approx 0.797601972$$

$$c_{a3} = \sqrt{3} \approx 1.732050808$$

である。

2.2.3 $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ による構成

\mathcal{A} の平面を表すベクトルを a 倍、 \mathcal{C} の平面を表すベクトルを c 倍する。つまり、原点から \mathcal{B} の各平面までの距離を b 、 \mathcal{C} の各平面までの距離を c とする。このとき、 $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ で表される立体を考える。

立体の形状は、 b と c の比に依存し、その変化は以下の通りである。

c	\mathcal{B} による面	\mathcal{C} による面	$\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ による立体	図
$c = c_{b1}b$	なし	正方形	立方体	図 2-C
$c_{b1}b \square h \square c_{b3}b$	正 3 角形	平行 6 角形	10 面体	図 2-BC
$c \geq c_{b3}b$	正 3 角形	なし	正 4 面体	図 2-B

また、特に

$$c = c_{b2}b$$

のとき、全ての稜線の長さが等しくなる (図 2-BC)。ただし、

$$c_{b1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577350269$$

$$c_{b2} = \frac{\sqrt{3}}{5 - 2\sqrt{2}} \approx 0.797601972$$

$$c_{b3} = \sqrt{3} \approx 1.732050808$$

である。

2.2.4 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ による構成

$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ が 14 面体となる条件 \mathcal{A} の平面を表すベクトルを a 倍、 \mathcal{B} の平面を表すベクトルを b 倍、 \mathcal{C} の平面を表すベクトルを c 倍する。つまり、原点から \mathcal{A} の各平面までの距離を a 、 \mathcal{B} の各平面までの距離を b 、 \mathcal{C} の各平面までの距離を c とする。

a, b, c が以下の関係を満たすとき、 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ は 14 面体となる。それ以外のときは、この章でこれまでに述べた立体のいずれかとなる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} < \frac{b}{a} < 3 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{c}{a} < \sqrt{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{c}{b} < \sqrt{3} \end{array} \right.$$

側面が大きさの異なる 2 種類の正 3 角形ならびに長方形となる条件

$$\begin{aligned} c &= \frac{\sqrt{3}}{4}a + \frac{\sqrt{3}}{4}b \\ &\approx 0.433012702a + 0.433012702b \end{aligned}$$

のとき、側面の形が正 3 角形 A・正 3 角形 B・長方形となる (正 3 角形 A と正 3 角形 B は、一般には大きさが異なる)。特に、

$$\begin{aligned} a:b:c &= 1:1:\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\approx 1:1:0.866025403 \end{aligned}$$

のとき、立方 8 面体となる (図 2-ABC-2)。

側面が 2 種類の半正 6 角形ならびに長方形となる条件

$$\begin{aligned} c &> \frac{\sqrt{3}}{4}a + \frac{\sqrt{3}}{4}b \\ &\approx 0.433012702a + 0.433012702b \end{aligned}$$

のとき、側面の形が半正 6 角形 A・半正 6 角形 B・長方形となる (半正 6 角形 A と半正 6 角形 B は、一般には大きさおよび形状が異なる)。特に、

$$\begin{aligned} a:b:c &= 1:1:\frac{2}{\sqrt{3}} \\ &\approx 1:1:1.154700538 \end{aligned}$$

のとき、切頭 8 面体となる (図 2-ABC-1)。

側面が大きさの異なる 2 種類の正 3 角形ならびに平行 8 角形となる条件

$$\begin{aligned} c &< \frac{\sqrt{3}}{4}a + \frac{\sqrt{3}}{4}b \\ &\approx 0.433012702a + 0.433012702b \end{aligned}$$

のとき、側面の形が正 3 角形 A・正 3 角形 B・長方形となる (正 3 角形 A と正 3 角形 B は、一般には大きさが異なる)。特に、

$$\begin{aligned} a:b:c &= 1:1:\sqrt{6}-\sqrt{3} \\ &\approx 1:1:0.717438935 \end{aligned}$$

のとき、切頭立方体となる (図 2-ABC-3)。

2.3 結果の図示

以上の考察から、 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ で表される多面体は、側面の形により以下の8種類に分類される。各頂点に集まる多角形を、 $[n_1, n_2, n_3, \dots]$ のように表すが、 n_1, n_2, \dots は、正多角形とは限らない。また、多角形が $3A, 3B$ の様に記述されている場合、 $3A$ と $3B$ は、一般には別の形状である。

(A),(B)	正4面体
(C)	立方体
(AB-1),(AB-3)	各頂点に集まる側面が、 $[3,6,6]$ となっている8面体(切頭4面体を含む)
(AB-2)	正8面体
(AC),(BC)	$[3,6,6]$ の頂点と $[6,6,6]$ の頂点を持つ10面体
(ABC-1)	各頂点に集まる側面が、 $[4,6A,6A]$ となっている14面体(切頭8面体を含む)
(ABC-2)	各頂点に集まる側面が、 $[3A,4,3B,4]$ となっている14面体(立方8面体を含む)
(ABC-3)	$[3A,8,8]$ の頂点と $[3B,8,8]$ の頂点を持つ14面体

3 4回回転対称性を持つ立体

ここでは、立方体や正8面体と同じ対称性を持つ立体について考察する。これらの立体は、立方体、正8面体、菱形12面体の積集合で表すことができる。

3.1 平面群の分類

立方体の体心から、各側面の中心へ向かうベクトル群、各稜線の中心へ向かうベクトル群、各頂点へ向かうベクトル群を求める。それぞれのベクトル群の各ベクトルを境界面の法線ベクトルとし、元の立方体の体心を含む半空間の積集合として得られる立体は、元の立方体、菱形12面体、正8面体(元の立方体と双対)である。

3.1.1 立方体の側面を構成する平面群

立方体(図3-C)の側面としての平面群は、前の章で述べた、 \mathcal{C} である。

3.1.2 正8面体の側面を構成する平面群

正8面体(図3-D)の側面としての平面群は、 \mathcal{C} の立方体と双対な位置関係になるようにして、

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

で表される。これらをまとめて、 \mathcal{D} で表す。

3.1.3 菱形12面体の側面を構成する平面群

菱形12面体(図3-E)の側面としての平面群は、 \mathcal{C} の立方体および \mathcal{D} の正8面体の各稜線に平行な位置関係になるようにして、

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

で表される。これらをまとめて、 \mathcal{E} で表す。

3.2 $\mathcal{C} \cdot \mathcal{D} \cdot \mathcal{E}$ 各平面群の積集合による構成

ここでは、立方体 \mathcal{C} 、正 8 面体 \mathcal{D} 、菱形 12 面体 \mathcal{E} の大きさが変化するとき、それらの積集合である立体の形状がどのように変化するか解析する。

3.2.1 $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ による構成

\mathcal{C} の平面を表すベクトルを c 倍、 \mathcal{D} の平面を表すベクトルを d 倍する。つまり、原点から \mathcal{C} の各平面までの距離を c 、 \mathcal{D} の各平面までの距離を d とする。このとき、 $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ で表される立体を考える。

立体の形状は、 c と d の比に依存し、その変化は以下の通りである。

d	\mathcal{C} による面	\mathcal{D} による面	$\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ による立体	図
$d \square d_{c1}c$	なし	正 3 角形	正 8 面体	図 3-D
$d_{c1}c < d < d_{c3}c$	正方形	半正 6 角形		
$d = d_{c2}c$	正方形	正 6 角形	切頭 8 面体	図 3-CD-3
$d = d_{c3}c$	正方形	正 3 角形	立方 8 面体	図 3-CD-2
$d_{c3}c < d < d_{c5}c$	半正 8 角形	正 3 角形		
$d = d_{c4}c$	正 8 角形	正 3 角形	切頭立方体	図 3-CD-1
$d_{c5}c \square d$	正方形	なし	立方体	図 3-C

ただし、

$$d_{c1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577350269$$

$$d_{c2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866025403$$

$$d_{c3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.154700538$$

$$d_{c4} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}} \approx 1.393846850$$

$$d_{c5} = \sqrt{3} \approx 1.732050808$$

とする。

3.2.2 $\mathcal{C} \cap \mathcal{E}$ による構成

\mathcal{C} の平面を表すベクトルを c 倍、 \mathcal{E} の平面を表すベクトルを e 倍する。つまり、原点から \mathcal{C} の各平面までの距離を c 、 \mathcal{E} の各平面までの距離を e とする。このとき、 $\mathcal{C} \cap \mathcal{E}$ で表される立体を考える。

立体の形状は、 c と e の比に依存し、その変化は以下の通りである。

e	\mathcal{C} による面	\mathcal{E} による面	$\mathcal{C} \cap \mathcal{E}$ による立体	図
$e = e_{c1}c$	なし	菱形 ($1:\sqrt{2}$)	菱形 12 面体	図 3-E
$e_{c1}c \square e \square e_{c3}c$	正方形	平行 6 角形	18 面体	図 3-CE
$e \geq e_{c3}c$	正方形	なし	立方体	図 3-C

また、特に

$$e = e_{c2}c$$

のとき、全ての稜線の長さが等しくなる (図 3-CE)。ただし、

$$\begin{aligned} e_{c1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707106781 \\ e_{c2} &= \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{13} \approx 0.920772869 \\ e_{c3} &= \sqrt{2} \approx 1.414213562 \end{aligned}$$

である。

3.2.3 $\mathcal{D} \cap \mathcal{E}$ による構成

\mathcal{D} の平面を表すベクトルを d 倍、 \mathcal{E} の平面を表すベクトルを e 倍する。つまり、原点から \mathcal{D} の各平面までの距離を d 、 \mathcal{E} の各平面までの距離を e とする。このとき、 $\mathcal{D} \cap \mathcal{E}$ で表される立体を考える。

立体の形状は、 d と e の比に依存し、その変化は以下の通りである。

e	\mathcal{D} による面	\mathcal{E} による面	$\mathcal{C} \cap \mathcal{E}$ による立体	図
$e = e_{d1}d$	なし	菱形 ($1:\sqrt{2}$)	菱形 12 面体	図 3-E
$e_{d1}d \square e \square e_{d3}d$	正 3 角形	平行 6 角形	20 面体	図 3-DE
$e \geq e_{d3}d$	正 3 角形	なし	正 8 面体	図 3-D

また、特に

$$e = e_{d2}d$$

のとき、全ての稜線の長さが等しくなる (図 3-DE)。ただし、

$$\begin{aligned} e_{d1} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 0.816496581 \\ e_{d2} &= \frac{3\sqrt{6} + 2}{10} \approx 0.934846922 \\ e_{d3} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \approx 1.224744871 \end{aligned}$$

である。

3.2.4 $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \cap \mathcal{E}$ による構成

$\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \cap \mathcal{E}$ が 26 面体となる条件 \mathcal{C} の平面を表すベクトルを c 倍、 \mathcal{D} の平面を表すベクトルを d 倍、 \mathcal{E} の平面を表すベクトルを e 倍する。つまり、原点から \mathcal{C} の各平面までの距離を c 、 \mathcal{D} の各平面までの距離を d 、 \mathcal{E} の各平面までの距離を e とする。

c, d, e が以下の関係を満たすとき、 $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \cap \mathcal{E}$ は 26 面体となる。それ以外のときは、この章でこれまでに述べた立体のいずれかとなる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{d}{c} < \sqrt{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{e}{c} < \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < \frac{e}{d} < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

側面が正方形・正3角形・長方形となる条件

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{2\sqrt{2}}c + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}d \\ &\approx 0.353553391c + 0.612372436d \end{aligned}$$

のとき、側面の形が正方形・正3角形・長方形となる。特に、

$$\begin{aligned} c:d:e &= 1: \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}: 1 \\ &\approx 1: 1.055642893: 1 \end{aligned}$$

のとき、菱形立方8面体となる(図3-CED-2)。

側面が半正8角形・半正6角形・長方形となる条件

$$\begin{aligned} e &> \frac{1}{2\sqrt{2}}c + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}d \\ &\approx 0.353553391c + 0.612372436d \end{aligned}$$

のとき、側面の形が半正8角形・半正6角形・長方形となる。特に、

$$\begin{aligned} c:d:e &= 1: \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{3}}{7}: \frac{1+5\sqrt{2}}{7} \\ &= 2\sqrt{2}+1: \sqrt{3}(\sqrt{2}+1): 3+\sqrt{2} \\ &\approx 1: 1.092234595: 1.153009687 \end{aligned}$$

のとき、切頭立方8面体となる(図3-CDE-1)。

側面が正方形・正3角形・平行8角形となる条件

$$\begin{aligned} e &< \frac{1}{2\sqrt{2}}c + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}d \\ &\approx 0.353553391c + 0.612372436d \end{aligned}$$

のとき、側面の形が正方形・正3角形・長方形となる。特に、

$$\begin{aligned} c:d:e &= 1: \frac{2+3\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{4\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}: \frac{4+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}} \\ &\approx 1: 0.962937863: 0.856802901 \end{aligned}$$

のとき、全ての稜線の長さが等しくなる(図3-CED-3)。

3.3 結果の図示

以上の考察から、 $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \cap \mathcal{E}$ で表される多面体は、側面の形により以下の 11 種類に分類される。各頂点に集まる多角形を、 $[n_1, n_2, n_3, \dots]$ のように表すが、 n_1, n_2, \dots は、正多角形とは限らない。また、多角形が 4A, 4B の様に記述されている場合、4A と 4B は、一般には別の形状である。

- (C) 立方体
- (D) 正 8 面体
- (E) 菱形 12 面体
- (CD-1) 各頂点に集まる側面が、 $[3, 8, 8]$ となっている 14 面体 (切頭立方体を含む)
- (CD-2) 立方 8 面体
- (CD-3) 各頂点に集まる側面が、 $[4, 6, 6]$ となっている 14 面体 (切頭 8 面体を含む)
- (CE) $[4, 6, 6]$ の頂点と $[6, 6, 6]$ の頂点を持つ 18 面体
- (DE) $[6, 6, 6, 6]$ の頂点と $[3, 6, 6]$ の頂点を持つ 20 面体
- (CDE-1) 各頂点に集まる側面が、 $[4, 6, 8]$ となっている 26 面体 (切頭立方 8 面体を含む)
- (CDE-2) 各頂点に集まる側面が、 $[3, 4A, 4B, 4A]$ となっている 26 面体 (菱形立方 8 面体を含む)
- (CDE-3) $[3, 6, 6]$ の頂点と $[4, 6, 6]$ の頂点を持つ 26 面体

4 5回回転対称性を持つ立体

ここでは、正 12 面体や正 20 面体と同じ対称性を持つ立体について考察する。これらの立体は、立方体、正 12 面体、正 20 面体、菱形 30 面体の積集合で表すことができる。

4.1 平面群の分類

正 12 面体の体心から、各側面の中心へ向かうベクトル群、各稜線の中心へ向かうベクトル群、各頂点へ向かうベクトル群を求める。それぞれのベクトル群の各ベクトルを境界面の法線ベクトルとし、元の正 12 面体の体心を含む半空間の積集合として得られる立体は、元の正 12 面体、菱形 30 面体、正 20 面体 (元の正 12 面体と双対) である。

4.1.1 正 12 面体の側面を構成する平面群

正 12 面体 (図 4-F) の側面としての平面群は、

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{\tau+2}}, 0, \pm \frac{\tau}{\sqrt{\tau+2}} \right) \left(0, \pm \frac{\tau}{\sqrt{\tau+2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{\tau+2}} \right) \left(\pm \frac{\tau}{\sqrt{\tau+2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{\tau+2}}, 0 \right)$$

で表される。これらをまとめて、 \mathcal{F} で表す。

4.1.2 正 20 面体の側面を構成する平面群

正 20 面体 (図 4-G) の側面としての平面群は、 \mathcal{F} の正 12 面体と双対な位置関係になるようにして、

$$\left(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3} \right) \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3\tau}}, 0, \pm \frac{\tau}{\sqrt{3}} \right) \left(0, \pm \frac{\tau}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3\tau}} \right) \left(\pm \frac{\tau}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3\tau}}, 0 \right)$$

で表される。これらをまとめて、 \mathcal{G} で表す。

4.1.3 菱形 30 面体の側面を構成する平面群

菱形 30 面体 (図 4-H) の側面としての平面群は、 \mathcal{F} の正 12 面体の各稜線に平行な位置関係になるようにして、

$$(0, 0, \pm 1) (0, \pm 1, 0) (\pm 1, 0, 0) \\ (\pm 1, \pm \tau, \pm \tau^2) (\pm \tau, \pm \tau^2, \pm 1) (\pm \tau^2, \pm 1, \pm \tau)$$

で表される。これらをまとめて、 \mathcal{H} で表す。

4.2 $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} \cdot \mathcal{H}$ 各平面群の積集合による構成

ここでは、正 12 面体 \mathcal{F} 、正 20 面体 \mathcal{G} 、菱形 30 面体 \mathcal{H} の大きさが変化するとき、それらの積集合である立体の形状がどのように変化するか解析する。

4.2.1 $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ による構成

\mathcal{F} の平面を表すベクトルを f 倍、 \mathcal{G} の平面を表すベクトルを g 倍する。つまり、原点から \mathcal{F} の各平面までの距離を f 、 \mathcal{G} の各平面までの距離を g とする。このとき、 $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ で表される立体を考える。

立体の形状は、 f と g の比に依存し、その変化は以下の通りである。

g	\mathcal{F} による面	\mathcal{G} による面	$\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ による立体	図
$g \square g_{f1}f$	なし	正 3 角形	正 20 面体	図 4-G
$g_{f1}f < g < g_{f3}f$	正 5 角形	半正 6 角形		
$g = g_{f2}f$	正 5 角形	正 6 角形	切頭 20 面体	図 4-FG-3
$g = g_{f3}f$	正 5 角形	正 3 角形	12-20 面体	図 4-FG-2
$g_{f3}f < g < g_{f5}f$	半正 10 角形	正 3 角形		
$g = g_{f4}f$	正 10 角形	正 3 角形	切頭 12 面体	図 4-FG-1
$g_{f5}f \square g$	正 5 角形	なし	正 12 面体	図 4-F

ただし、

$$g_{f1} = \frac{\tau + 1}{\sqrt{3}\sqrt{\tau + 2}} \approx 0.794654472 \\ g_{f2} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{\tau + 2}(\tau + 1)}{3\tau + 4} \approx 0.974154206 \\ g_{f3} = \frac{\sqrt{\tau + 2}}{\sqrt{3}} \approx 1.098185471 \\ g_{f4} = \frac{5\tau + 2}{\sqrt{3}\sqrt{\tau + 2}(\tau + 1)} \approx 1.169839420 \\ g_{f5} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{\tau + 2}}{\tau + 1} \approx 1.258408572$$

とする。

4.2.2 $\mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ による構成

\mathcal{F} の平面を表すベクトルを f 倍、 \mathcal{H} の平面を表すベクトルを h 倍する。つまり、原点から \mathcal{F} の各平面までの距離を f 、 \mathcal{H} の各平面までの距離を h とする。このとき、 $\mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ で表される立体を考える。

立体の形状は、 f と h の比に依存し、その変化は以下の通りである。

h	\mathcal{F} による面	\mathcal{H} による面	$\mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ による立体	図
$h = h_{f1}f$	なし	菱形 (1: τ)	菱形 30 面体	図 4-H
$h_{f1}f \square h \square h_{f3}f$	正 5 角形	平行 6 角形	42 面体	図 4-FH
$h \geq h_{f3}f$	正 5 角形	なし	正 12 面体	図 4-F

また、特に

$$h = h_{f2}f$$

のとき、全ての稜線の長さが等しくなる (図 4-FH)。ただし、

$$h_{f1} = \frac{\tau}{\sqrt{\tau+2}} \approx 0.850650808$$

$$h_{f2} = \frac{\sqrt{\tau+2}}{(5-2\sqrt{\tau+2})\tau} \approx 0.983104306$$

$$h_{f3} = \frac{\sqrt{\tau+2}}{\tau} \approx 1.175570505$$

である。

4.2.3 $\mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ による構成

\mathcal{G} の平面を表すベクトルを g 倍、 \mathcal{H} の平面を表すベクトルを h 倍する。つまり、原点から \mathcal{G} の各平面までの距離を g 、 \mathcal{H} の各平面までの距離を h とする。このとき、 $\mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ で表される立体を考える。

立体の形状は、 g と h の比に依存し、その変化は以下の通りである。

h	\mathcal{G} による面	\mathcal{H} による面	$\mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ による立体	図
$h \square h_{g1}g$	なし	菱形 (1: τ)	菱形 30 面体	図 4-H
$h_{g1}g < h < h_{g3}g$	正 3 角形	平行 6 角形	50 面体	図 4-GH
$h \geq h_{g3}g$	正 3 角形	なし	正 20 面体	図 4-G

また、特に

$$h = h_{g2}g$$

のとき、全ての稜線の長さが等しくなる (図 4-GH)。ただし、

$$h_{g1} = \frac{\tau}{\sqrt{3}} \approx 0.934172359$$

$$h_{g2} = \frac{\sqrt{3}(8\tau+5)}{17\tau+8-2\sqrt{\tau+2}} \approx 0.980381232$$

$$h_{g3} = \frac{\sqrt{3}}{\tau} \approx 1.070466269$$

である。

4.2.4 $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ による構成

$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ が62面体となる条件 \mathcal{F} の平面を表すベクトルを f 倍、 \mathcal{G} の平面を表すベクトルを g 倍、 \mathcal{H} の平面を表すベクトルを h 倍する。つまり、原点から \mathcal{F} の各平面までの距離を f 、 \mathcal{G} の各平面までの距離を g 、 \mathcal{H} の各平面までの距離を h とする。

f, g, h が以下の関係を満たすとき、 $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ は62面体となる。それ以外のときは、これまでに述べた立体のいずれかとなる。

$$\begin{cases} \frac{\tau+1}{\sqrt{3}\sqrt{\tau+2}} < \frac{g}{f} < \frac{\sqrt{3}\sqrt{\tau+2}}{\tau+1} \\ \frac{\tau}{\sqrt{\tau+2}} < \frac{h}{f} < \frac{\sqrt{\tau+2}}{\tau} \\ \frac{\tau}{\sqrt{3}} < \frac{h}{g} < \frac{\sqrt{3}}{\tau} \end{cases}$$

側面が正5角形・正3角形・長方形となる条件

$$\begin{aligned} h &= \frac{\sqrt{\tau+2}}{4\tau}f + \frac{\sqrt{3}\tau}{4}g \\ &\approx 0.293892626f + 0.700629269g \end{aligned}$$

のとき、側面の形が正5角形・正3角形・長方形となる。特に、

$$\begin{aligned} f:g:h &= 1 : \frac{\sqrt{4\tau+23}}{3\sqrt{3}} : \frac{\tau\sqrt{\tau+2}}{3} \\ &\approx 1 : 1.044777771 : 1.025894512 \end{aligned}$$

のとき、菱形12-20面体となる(図4-FGH-2)。

側面が正10角形・正6角形・長方形となる条件

$$\begin{aligned} h &> \frac{\sqrt{\tau+2}}{4\tau}f + \frac{\sqrt{3}\tau}{4}g \\ &\approx 0.293892626f + 0.700629269g \end{aligned}$$

のとき、側面の形は10角形・6角形・長方形となる。特に、

$$\begin{aligned} f:g:h &= (\tau+2)\sqrt{\tau+2} : \sqrt{3}(2\tau+1) : 4\tau+1 \\ &\approx 1 : 1.066140851 : 1.085764909 \end{aligned}$$

のとき、切頭12-20面体となる(図4-FGH-1)。

側面が正5角形・正3角形・平行8角形となる条件

$$\begin{aligned} h &< \frac{\sqrt{\tau+2}}{4\tau}f + \frac{\sqrt{3}\tau}{4}g \\ &\approx 0.293892626f + 0.700629269g \end{aligned}$$

のとき、側面の形は正5角形、正3角形、平行8角形となる。特に、

$$\begin{aligned} f:g:h &= \frac{1}{\sqrt{\tau+2}} \left(\frac{\tau+\beta}{\beta+\tau+\beta\tau} + \tau^2 \right) : \frac{1}{\sqrt{3}\tau} \left(\frac{1+\beta}{\beta+\tau+\beta\tau} + \tau^3 \right) : \tau \\ &\approx 1 : 0.985820752 : 0.948897353 \end{aligned}$$

のとき、全ての稜線の長さが等しくなる(図4-FGH-3)。

4.3 結果の図示

以上の考察から、 $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ で表される多面体は、側面の形により以下の 11 種類に分類される。各頂点に集まる多角形を、 $[n_1, n_2, n_3, \dots]$ のように表すが、 n_1, n_2, \dots は、正多角形とは限らない。

- (F) 正 12 面体
- (G) 正 20 面体
- (H) 菱形 30 面体
- (FG-1) 各頂点に集まる側面が、 $[3, 10, 10]$ となっている 32 面体 (切頭 12 面体を含む)
- (FG-2) 12-20 面体
- (FG-3) 各頂点に集まる側面が、 $[5, 6, 6]$ となっている 32 面体 (切頭 20 面体を含む)
- (FH) $[6, 6, 6]$ の頂点と $[5, 6, 6]$ の頂点を持つ 42 面体
- (GH) $[6, 6, 6, 6, 6]$ の頂点と $[3, 6, 6]$ の頂点を持つ 50 面体
- (FGH-1) 各頂点に集まる側面が、 $[4, 6, 10]$ となっている 62 面体 (切頭 12-20 面体を含む)
- (FGH-2) 各頂点に集まる側面が、 $[3, 4, 5, 4]$ となっている 62 面体 (菱形 12-20 面体を含む)
- (FGH-2) $[3, 6, 6]$ の頂点と $[5, 6, 6]$ の頂点を持つ 62 面体

5 結論

本論文では、正多面体から導かれる、半正多面体などの立体形状を、ソリッドモデルの CSG 表現を用いて記述することを目的とした。具体的には、三つの基本立体を元の正多面体から導き、それぞれの大きさを一つづつのパラメータで決定し、積集合をとることでモデリングした。また、正確に稜線の長さが等しくなる条件を、それら三つのパラメータの比として決定した。

その結果、これまで全ての頂点の座標を列挙せねばならなかった半正多面体などの形状データを、元の正多面体によるグループごとに、三つのパラメータだけで記述することができるようになった。さらに、これまで分類が困難であった、菱形 12 面体や菱形 30 面体の切頭図形 (図 3-CE, DE, CDE-3; 図 4-FH, GH, FGH-3) など、同じように記述、分類することができた。

また、図には示されていないが、これらの立体の形状変化を連続的にアニメーションで見ることが可能となっている。この形状変化の境界条件は、各表に示した通りである。

本論文の応用としては、4 次元以降への拡張が考えられる。具体的には、 n 次元の正多胞体から導かれる半正多胞体が n 個のパラメータで記述することが可能となり、そのモデリングや分類が容易になる。本論文の手法を、実際に 5 次元に応用した成果の一部を [7] に示した。

参考文献

- [1] H. S. M. Coxeter, "Regular Polytopes", 1973
- [2] H. Lalbani, "Structures on Hyper-structures", 1982
- [3] 宮崎興二・石原慶一, 『4次元グラフィックス』, 朝倉書店, 1989
- [4] 佐藤義雄, 『実習グラフィックス』, アスキー出版局, 1986
- [5] 太田昌孝・竹内あきら・大口孝之, 『応用グラフィックス』, アスキー出版局, 1986
- [6] 技術編 CG 標準テキストブック編集委員会 (編), 『コンピュータグラフィックス〈技術編 CG 標準テキストブック〉』, 財団法人画像処理情報教育振興協会, 1997
- [7] 石井源久, 『高次元半正多胞体の座標』, 形の科学会誌, Vol.13, No.2, pp.133-134, 1998