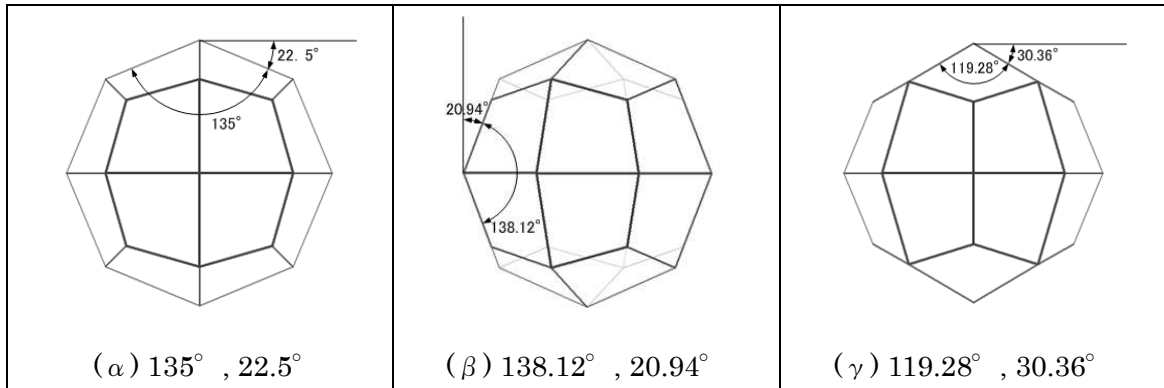


● 立方体から珮型 24 面体を切り出す案

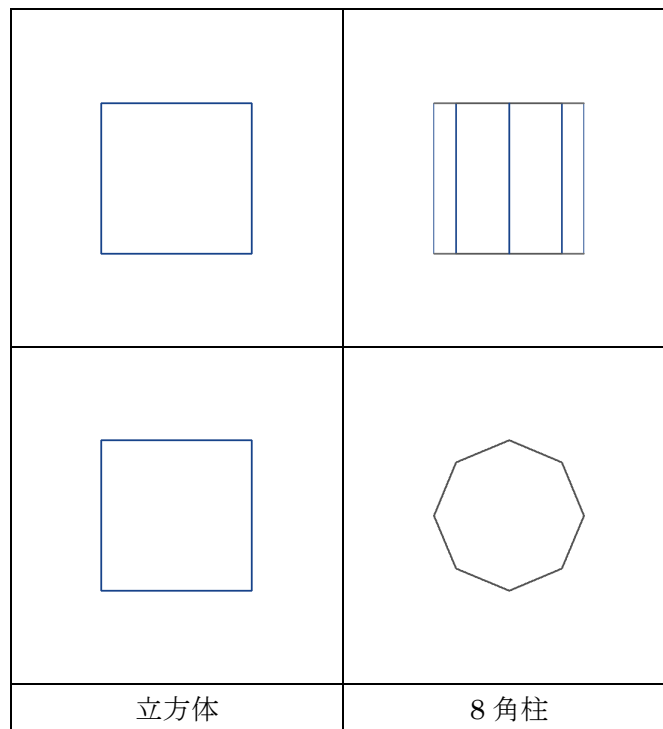
2006 年 9 月 29 日

石井源久

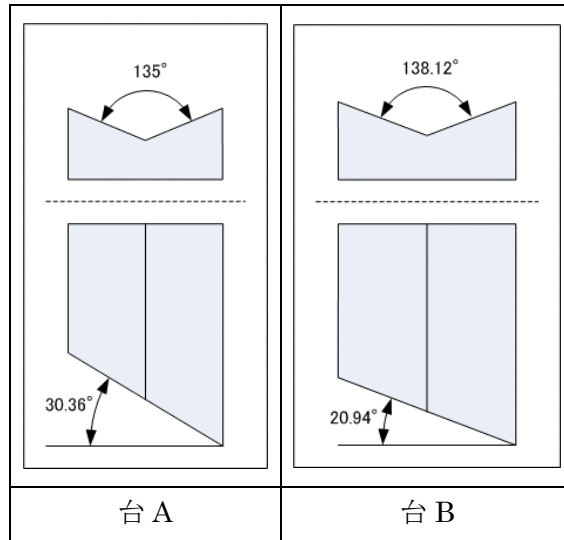
(1) 下の角度を求めておく。※求め方については後述します。



(2) 立方体から、正 8 角形の柱を作る。(α)の角度を利用。



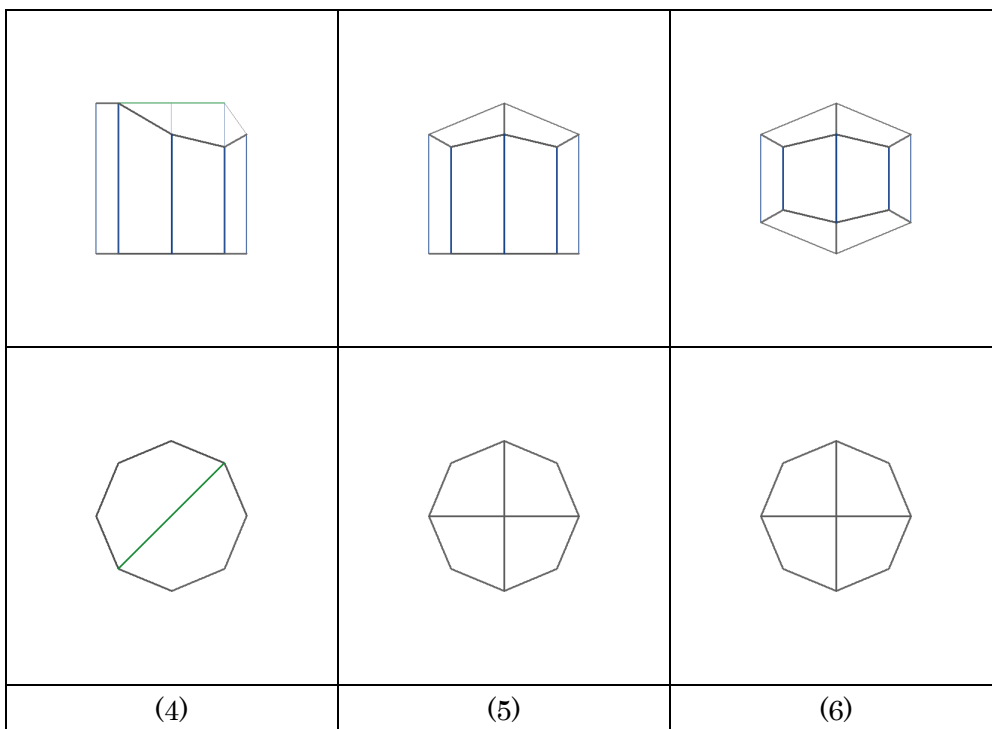
(3) 下のような台A,B (3次元定規) を作る。



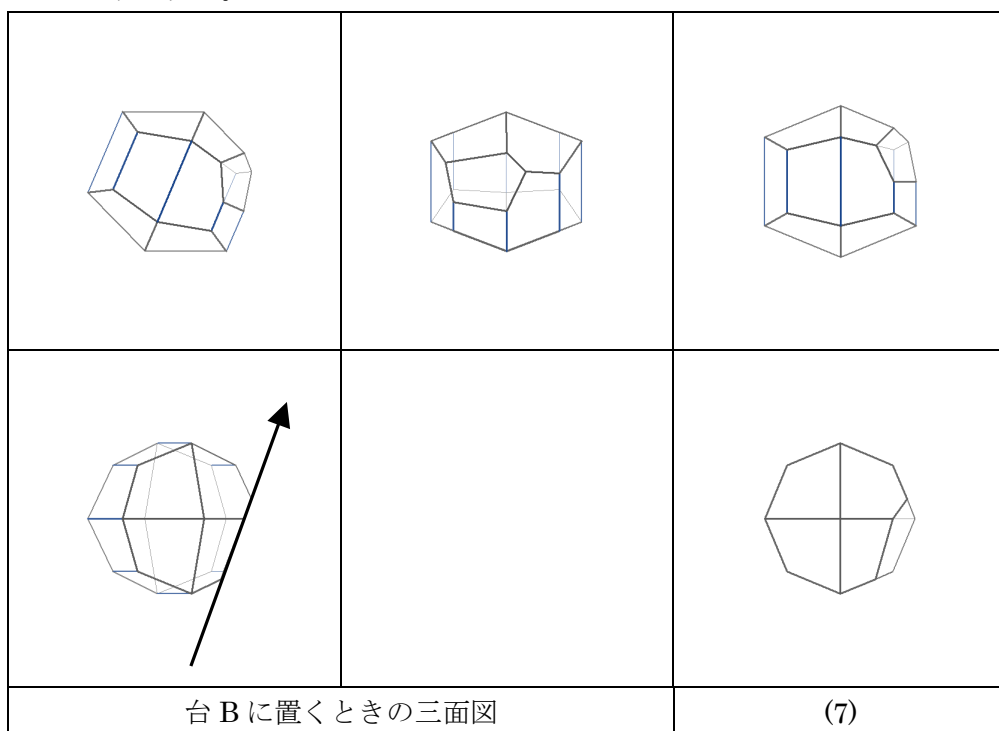
(4) 正8角柱を台Aに載せて、上底面の正8角形の中心を通るように切る。

(5) 90度ずつ回転させて計4回切る。

(6) 下底面も同じように4回切る。



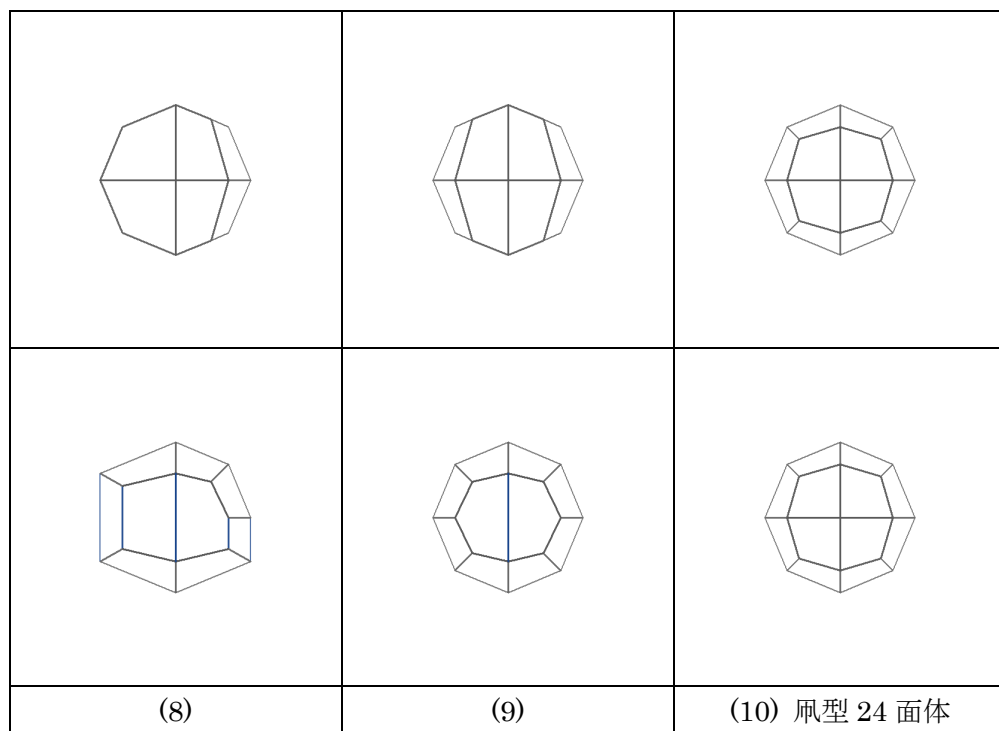
(7) 図形(5)を台 B に下の三面図の様に置いて、矢印で切る。(β)の角度を利用。青い線分の中心を通るように切る。



(8) 同様に 2 回切ったところ。

(9) 同じように計 8 回切る。

(10) 残った 8 面についても、同様に切る。(凧型 24 面体)

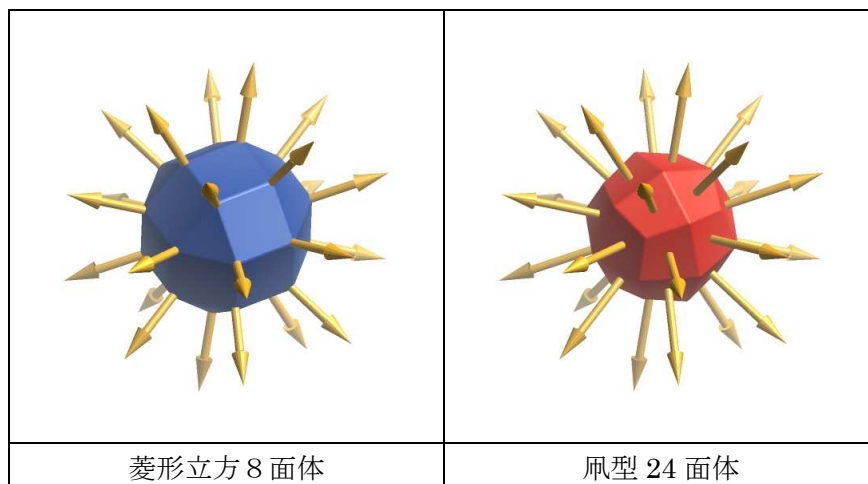


付) 菱形立方 8 面体と 珮型 24 面体の双対関係

- 珮型 24 面体は、菱形立方 8 面体の双対図形である。



- 菱形立方 8 面体の中心から、各頂点に向かうベクトル(下図左)が、珮型 24 面体の各面の法線ベクトル(下図右)になる。

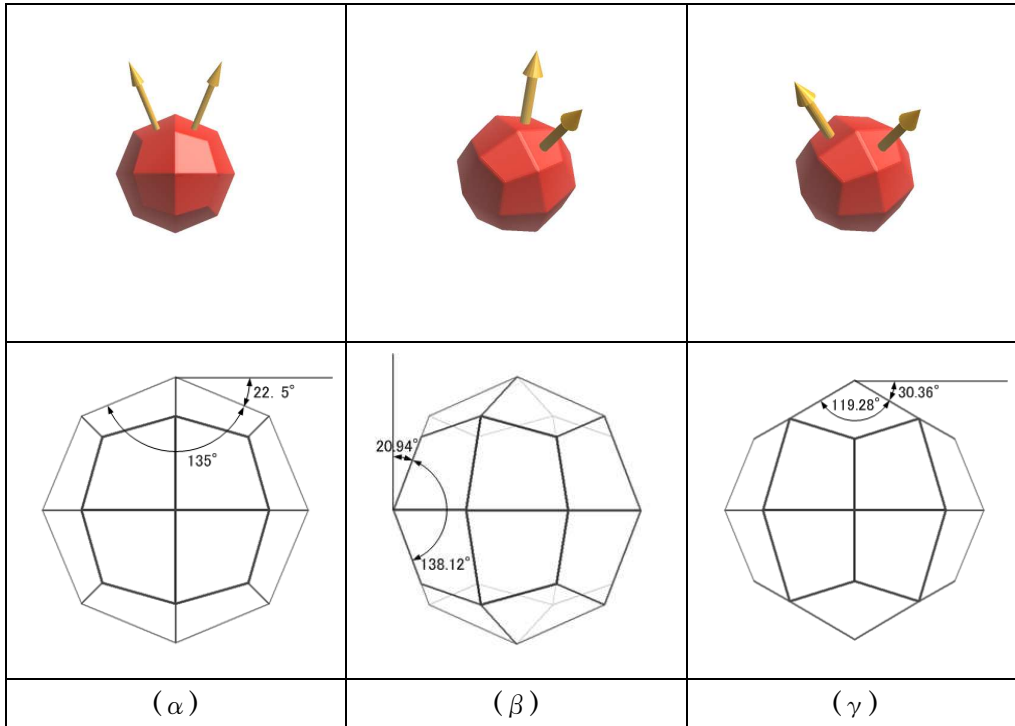


- 菱形立方 8 面体の頂点は、以下の 24 個。

$$a = \sqrt{2} - 1 \cong 0.4142 \quad \text{として、} \quad (\pm a, \pm a, \pm 1), \quad (\pm a, \pm 1, \pm a), \quad (\pm 1, \pm a, \pm a)$$

双対関係より、珮型 24 面体の各面の法線ベクトルも上の 24 個で表される。

● 角度の計算



(α) 図の2つのベクトルの成す角 α' を、xy平面に投影した平面図上で求める。

$$\cos(\alpha') = \frac{(a,1) \cdot (-a,1)}{|(a,1)| |(-a,1)|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \alpha' = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$$

$$\therefore \text{図の角 } \alpha = 180^\circ - \alpha' = 135^\circ$$

(β) 図の2つのベクトルの成す角 β' を、3次元空間内で求める。

$$\cos(\beta') = \frac{(a,a,1) \cdot (-a,a,1)}{|(a,a,1)| |(-a,a,1)|} = \frac{1}{7-4\sqrt{2}} \cong \frac{1}{1.343146} \cong 0.744521$$

$$\therefore \beta' = \cos^{-1}(0.744521) = 41.88^\circ$$

$$\therefore \text{図の角 } \beta = 180^\circ - \beta' = 138.12^\circ$$

(γ) 図の2つのベクトルの成す角 γ' を、3次元空間内で求める。

$$\cos(\gamma') = \frac{(a,a,1) \cdot (-a,-a,1)}{|(a,a,1)| |(-a,-a,1)|} = \frac{4\sqrt{2}-5}{7-4\sqrt{2}} \cong \frac{0.656854}{1.343146} \cong 0.489041$$

$$\therefore \gamma' = \cos^{-1}(0.489041) = 60.72^\circ$$

$$\therefore \text{図の角 } \gamma = 180^\circ - \gamma' = 119.28^\circ$$

以上